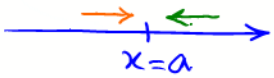
$a^- \longrightarrow$ اندکی از a کمتر هستیم

$a^+ \longrightarrow$ اندکی از a بیشتر هستیم

حد تابع

حد رفتار تابع در اطراف یک نقطه را بررسی می‌کند لذا هر حد به 2 حد راست و حد چپ تبدیل شده که در صورت برابر بودن آنها تابع در نقطه موردنظر دارای حد خواهد بود.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} \text{حد چپ} : \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \\ \text{حد راست} : \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = k \end{cases} \Rightarrow L = k \text{ تابع حد دارد}$$



یادآوری: حاصل کسرهای زیر را به خاطر می‌سپاریم.

$$\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = 0 \qquad \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \begin{cases} \dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر نسبی}} = \infty \\ \dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده} \end{cases} \qquad \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \begin{cases} \dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر نسبی}} = 0 \\ \dfrac{\text{صفر نسبی}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده} \end{cases}$$

$$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده} \qquad \frac{\text{صفر نسبی}}{\text{صفر نسبی}} = \text{مبهم}$$

نیاز به رفع ابهام دارد.

★ رفع ابهام حالت‌های مقدماتی

برای رفع ابهام حالت‌های $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ (اصلی) (دو حالت $0\times\infty$ و $\infty-\infty$ (فرعی) همواره به یکی از 2 حالت قبل تبدیل می‌شود) از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ یا } \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حاصل حد جدید هر مقداری شد همان حاصل حد اولیه نیز خواهد بود و در صورت مبهم شدن مجدد حد این عمل (هوپیتال) را تکرار می‌کنیم.

یادآوری چند قاعده مشتق‌گیری

1) $y = u^n \rightarrow y' = nu'u^{n-1}$

2) $y = uv \rightarrow y' = u'v + v'u$

3) $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

4) $y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

5) $y = \sqrt[n]{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

6) $y = e^u \rightarrow y' = u'e^u$

7) $y = a^u \rightarrow y' = u'a^u \ln a$

8) $y = \ln u \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

9) $y = \log_a u \rightarrow y' = \frac{u'}{u\ln a}$

10) $y = \sin u \rightarrow y' = u'\cos u$

11) $y = \cos u \rightarrow y' = -u'\sin u$

12) $y = \tan u \rightarrow y' = u'(1+\tan^2 u)$

13) $y = \cot u \rightarrow y' = -u'(1+\cot^2 u)$

14) $y = \text{Arc}\sin u \rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

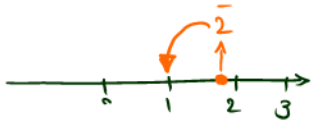
15) $y = \text{Arc}\tan u \rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$

به موارد زیر دقت کنید:

اگر در گزینه‌ها "حد ندارد" دیدیم حتماً باید حد راست و حد چپ را جداگانه محاسبه کنیم، در غیر اینصورت نیازی به محاسبه جداگانه حد راست و چپ نداریم.

در همه حدها بدون استثنا، اگر به صفر برخورد کردیم، حتماً و قطعاً آن "صفر نسبی" است، فقط و فقط زمانی که صفر از براکت حاصل شده باشد، مطلق خواهد بود.

$$I = \lim_{x\to 2} \frac{[x]-2}{x^2-4}$$



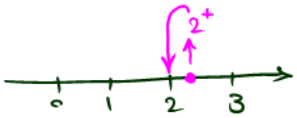
حد چپ: $\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]-2}{x^2-4} = \frac{[2^-]-2}{(2^-)^2-4} = \frac{1-2}{4^- -4} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

نسبی یا حدی

حد راست: $\lim_{x\to 2^+} \frac{[x]-2}{x^2-4} = \frac{[2^+]-2}{(2^+)^2-4} = \frac{2-2}{4^+-4} = \frac{0}{0} = 0$

مطلق یا واقعی

نسبی یا حدی



حد ندارد

1) صفر
2) $+\infty$
3) $-\infty$
✓4) حد ندارد

۲۲۹- مقدار $\lim_{x\to ۲} \frac{x-۳}{۱+۳^{\frac{۱}{x-۲}}}$، کدام است؟ (MBA-1403)

۱) صفر
۲) $-\infty$
۳) $+\infty$
✓۴) مقدار حد وجود ندارد.

حد چپ: $x\to 2^-$: $\frac{2^- -3}{1-3^{\frac{1}{2^- -2}}} = \frac{-1}{1-3^{\frac{1}{0^-}}} = \frac{-1}{1-3^{-\infty}}$

$3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

$= \frac{-1}{1-0} = \frac{-1}{1} = -1$

حد ندارد

حد راست: $x\to 2^+$: $\frac{2^+ -3}{1-3^{\frac{1}{2^+ -2}}} = \frac{-1}{1-3^{\frac{1}{0^+}}} = \frac{-1}{1-3^{+\infty}} = \frac{-1}{1-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

مثال: حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$I=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[4]{x^2+5x+2}}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[4]{16}}=\frac{3-3}{2-2}=\frac{0}{0}\ \text{ابهام}$$

$$\sqrt{\square}\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{\square'}{2\sqrt{\square}}$$

$$\xrightarrow{HOP} I=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{4}{2\sqrt{4x+1}}-\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}}{\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt[3]{(3x+2)^{3-1}}}-\frac{2x+5}{4\sqrt[4]{(x^2+5x+2)^{4-1}}}}$$

$$\sqrt[n]{\square}\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{\square'}{n\sqrt[n]{\square^{n-1}}}$$

$$I=\lim\frac{\frac{4}{2\sqrt{9}}-\frac{5}{2\sqrt{9}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}-\frac{9}{4\sqrt[4]{16^3}}}=\frac{\frac{4}{6}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}-\frac{9}{4\times 8}}=\frac{\frac{-1}{6}}{\frac{1}{4}-\frac{9}{32}}$$

$$=\frac{\frac{-1}{6}}{\frac{-1}{32}}=\frac{16}{3}$$

۲۴۱- اگر تابع f در $x=3$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\lim_{x\to 3}\frac{x^2f(3)-9f(x)}{x-3}$، کدام است؟

۱) $3f(3)-9f'(9)$

۲) $9f(3)-6f'(3)$

۳) $6f(3)-9f'(3)$ ✓

۴) $9f(9)-3f'(3)$

$$I=\lim_{x\to 3}\frac{x^2f(3)-9f(x)}{x-3}=\frac{9f(3)-9f(3)}{3-3}=\frac{0}{0}\ \text{ابهام}$$

$$\xrightarrow{HOP} I=\lim_{x\to 3}\frac{2xf(3)-9f'(x)}{1}=6f(3)-9f'(3)$$

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{e^{2x}+e^{3x}-5x-2}=\frac{0-\ln 1}{1+1-0-2}=\frac{0-0}{2-2}=\frac{0}{0}\ \text{ابهام}$$

$$\ln 1=0$$

$$\ln(\square)\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{\square'}{\square}$$

$$e^{\square}\xrightarrow{\text{مشتق}}\square' e^{\square}$$

$$\xrightarrow{HOP} I=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2e^{2x}+3e^{3x}-5}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP} I=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\overset{\text{پاک}}{\cancel{0\times(1+x)}}-1(1)}{(1+x)^2}}{4e^{2x}+9e^{3x}}=\frac{\frac{1}{1}}{4+9}=\frac{1}{13}$$

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{1-1}-\frac{1}{\ln 1}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$$ مبهم $\longrightarrow$ بی‌شخصیت

$$\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{0\times x-1(1)}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$$

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HoP} I=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{1\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HoP} I=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{-1}{x^2}}=\frac{-1}{1+1}=\frac{-1}{2}$$

$$I=\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\infty\left(e^{\frac{1}{\infty}}-1\right)=\infty\times\left(e^{0}-1\right)=\infty\times(1-1)=\infty\times 0$$ مبهم $\longrightarrow$ بی‌شخصیت

$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\frac{e^{\frac{1}{\infty}}-1}{\frac{1}{\infty}}=\frac{e^{0}-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$ $\longrightarrow$ بی‌شخصیت

$$\xrightarrow{HoP} I=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{\frac{-1}{x^2}}e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{-1}{x^2}}}=e^{\frac{1}{\infty}}=e^{0}=1$$

یادآوری مهم $\longrightarrow$ اولین قضیه بنیادین حساب دیفرانسیل $\longrightarrow$ قضیه لایب‌نیتس

$\longrightarrow$ مشتق‌گیری از انتگرال

$$y=\int_{f(x)}^{g(x)}h(t)\,dt\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=g'(x)\,h(g(x))-f'(x)\,h(f(x))$$

مشتق انتگرال برابر است با مشتق بالایی در بالایی به جای t منهای مشتق پایینی در پایینی به جای t

$$y=\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{1+t}\,dt\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=3x^2\,\frac{1}{1+x^3}-2x\,\frac{1}{1+x^2}$$

قواعد هم‌ارزی

برای رفع ابهام حد می‌توان به جای تابع موجود در حد هم‌ارز آن را قرار داده به این امید که حد به ظاهر ساده‌تری تبدیل شود و قابل رفع ابهام باشد.

تذکر مهم: در استفاده از هر نوع قاعده هم‌ارزی ابتدا اولین جمله هم‌ارزی را قرار می‌دهیم در صورتی که قرینه جمله اول در حد موجود بود علاوه بر اولین جمله باید دومین جمله هم‌ارزی را نیز قرار دهیم (هم‌ارزی تعمیم‌یافته) تا جمله‌ای داشته باشیم که قرینه آن در حد موجود نباشد.

هم‌ارزی‌های مهم

در کلیه هم‌ارزی‌های زیر A عبارتی بر حسب x بوده که باید به سمت صفر میل کند.

$A \to 0$

$$e^A \sim 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \ldots$$

$$\cos A \sim 1 - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - + \ldots$$

$$\sin A \sim A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - + \ldots$$

$$tgA \sim A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{15} + \ldots$$

$$\text{Arc } tgA \sim A - \frac{A^3}{3} + \frac{A^5}{5} - + \ldots$$

$$\sin hA \sim A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \ldots$$

$$\cosh A \sim 1 + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots$$

$$\ln(1+A) \sim A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - + \ldots$$

رفع ابهام حالت‌های مبهم نمایی

برای رفع ابهام کردن حالت‌های ∞^0 و 0^∞ و 1^∞ و 0^0 ابتدا حد را مساوی یک پارامتر قرار داده و از طرفین حد $\ln$ می‌گیریم بدین ترتیب حد به یکی از حالت‌های مبهم مقدماتی تبدیل می‌شود و قابل رفع ابهام خواهد بود.

نکته خیلی مهم: هرگاه $I = \lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ حالت مبهم 1^∞ باشد می‌توان آن را از طریق $I = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x)(f(x)-1)}$ محاسبه کرد.